Единый государственный экзамен по МАТЕМАТИКЕ

Демонстрационный вариант контрольных измерительных материалов для проведения в 2017 году единого государственного экзамена по МАТЕМАТИКЕ

Пояснения к демонстрационному варианту контрольных измерительных материалов для ЕГЭ по математике 2017 года (профильный уровень).

Демонстрационный вариант предназначен для того, чтобы дать представление о структуре будущих контрольных измерительных материалов, количестве заданий, их форме и уровне сложности.

Задания демонстрационного варианта не отражают всех вопросов содержания, которые могут быть включены в контрольные измерительные материалы в 2017 году. Структура работы приведена в спецификации, а полный перечень вопросов — в кодификаторах элементов содержания и требований к уровню подготовки выпускников образовательных организаций для проведения единого государственного экзамена 2017 г. по математике.

Изменение в КИМ 2017 года по сравнению с КИМ 2016 года

Существенных изменений нет.

Однако из первой части исключены два задания: задание практико-ориентированной направленности базового уровня сложности и задание по стереометрии повышенного уровня сложности.

Максимальный первичный балл уменьшился с 34 до 32.

Экзаменационная работа состоит из двух частей, которые различаются по содержанию, сложности и числу заданий. Определяющим признаком каждой части работы является форма заданий:

- часть 1 содержит 8заданий (задания 1–8) с кратким ответом;
- часть 2 содержит 4 задания (задания 9–12) с кратким ответом и семь заданий (задания 13–19) с развёрнутым ответом.

По уровню сложности задания распределяются следующим образом: задания 1–8 имеют базовый уровень, задания 9–17 – повышенный уровень, задания 18 и 19 относятся к высокому уровню сложности.

Задания первой части предназначены для определения математических компетентностей выпускников образовательных организаций, реализующих программы среднего (полного) общего образования на базовом уровне.

Задание с кратким ответом (1-12) считается выполненным, если в бланке ответов № 1 зафиксирован верный ответ в виде целого числа или конечной десятичной дроби.

Задания 13–19 с развёрнутым ответом, в числе которых пять заданий повышенного и два задания высокого уровней сложности, предназначены для более точной дифференциации абитуриентов вузов.

Правильное решение каждого из заданий 1-12 оценивается одним баллом.

Правильное решение каждого из заданий 13- 15 оценивается- 2 баллами; 16 и 17 — 3 баллами; 18 и 19 —4 баллами. Максимальный первичный балл за выполнение всей работы — 32 балла.

Верное выполнение не менее пяти заданий варианта КИМ отвечает минимальному уровню подготовки, подтверждающему освоение выпускником основных общеобразовательных программ общего (полного) среднего образования.

В демонстрационном варианте представлено по несколько примеров заданий на каждую позицию экзаменационной работы. В реальных вариантах экзаменационной работы на каждую позицию будет предложено только одно задание.

К каждому заданию с развёрнутым ответом, включённому в демонстрационный вариант, предлагается одно из возможных решений. Приведённые критерии оценивания позволяют составить представление о требованиях к полноте и правильности решений

Демонстрационный вариант контрольных измерительных материалов, система оценивания, спецификация и кодификаторы помогут выработать стратегию подготовки к ЕГЭ по математике

Инструкция по выполнению работы
Профильный уровень

Экзаменационная работа состоит из двух частей, включающих в себя 19 заданий.

Часть 1 содержит 8 заданий базового уровня сложности с кратким ответом.

Часть 2 содержит 4 задания повышенного уровня сложности с кратким ответом и 7 заданий повышенного и высокого уровня сложности с развёрнутым ответом.

На выполнение экзаменационной работы по математике отводится 3 часа 55 минут (235 минут).

Ответы к заданиям 1–12 записываются в виде целого числа или конечной десятичной дроби.

Числа запишите в поля ответов в тексте работы, а затем перенесите в бланк ответов № 1.

Ответ: –0,8 .   10 - 0 , 8

При выполнении заданий 13–19 требуется записать полное решение и ответ в бланке ответов № 2.

Все бланки ЕГЭ заполняются яркими чёрными чернилами. Допускается использование гелевой, капиллярной или перьевой ручек.

При выполнении заданий можно пользоваться черновиком. Записи в черновике не учитываются при оценивании работы.

Баллы, полученные Вами за выполненные задания, суммируются. Постарайтесь выполнить как можно больше заданий и набрать наибольшее количество баллов.

Желаем успеха!

Ответом к заданиям 1–12 является целое число или конечная десятичная дробь. Ответ следует записать в *БЛАНК ОТВЕТОВ* № 1 справа от номера выполняемого задания, начиная с первой клеточки. Каждую цифру, знак минус и запятую пишите в отдельной клеточке в соответствии с приведёнными в бланке образцами. Единицы измерений писать не нужно.

Часть 1

1 ***<u>Простейшие задачи</u>***

Тетрадь стоит 24 рубля. Сколько рублей заплатит покупатель за 60 тетрадей, если при покупке больше 50 тетрадей магазин делает скидку 10% от стоимости всей покупки?

Решение.

За 60 тетрадей покупатель заплатил бы $60 \cdot 24 = 1440$ рублей. Скидка составит 10%, т. е. 144 рубля. Значит, покупатель заплатит $1440 - 144 = 1296$ рублей.

Ответ: 1296.

<u>или</u>

Налог на доходы составляет 13% от заработной платы. После удержания налога на доходы Мария Константиновна получила 9570 рублей. Сколько рублей составляет заработная плата Марии Константиновны?

Решение.

Пусть заработная плата Марии Константиновны составляет x рублей. Тогда

$$x - 0.13x = 9570 \Leftrightarrow 0.87x = 9570 \Leftrightarrow x = 9570 : 0.87 \Leftrightarrow x = 11000$$

Значит, зарплата Марии Константиновны составляет 11 000 рублей.

Ответ: 11 000.

<u>или</u>

При оплате услуг через платежный терминал взимается комиссия 5%. Терминал принимает суммы кратные 10 рублям. Аня хочет положить на счет своего мобильного телефона не меньше 300 рублей. Какую минимальную сумму она должна положить в приемное устройство данного терминала?

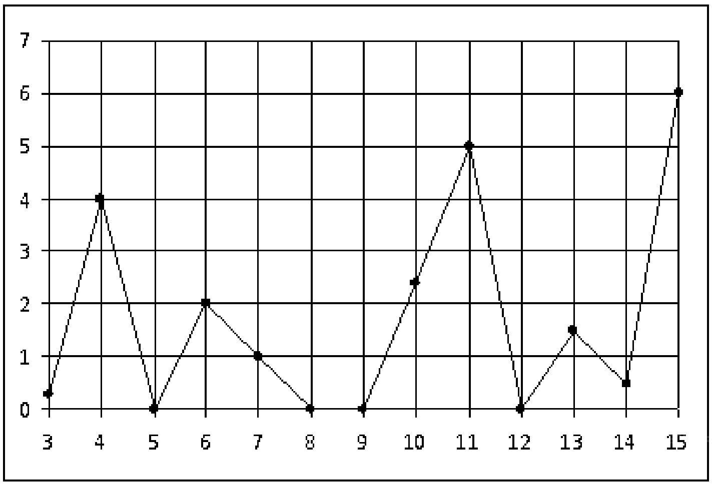
Решение.

С учетом комиссии, Аня должна внести в приемное устройство сумму не менее $300 + 300 \cdot 0{,}05 = 315$ рублей. Значит, минимальная сумма, которую должна положить Аня в приемное устройство данного терминала — 320 рублей. Проверим, что этой суммы достаточно: 5% от нее составляют 16 руб. (это комиссия), оставшиеся 304 рубля пойдут на счет телефона.

Ответ: 320.

2 <u>***Чтение графиков и диаграмм***</u>

На рисунке жирными точками показано суточное количество осадков, выпадавших в Казани с 3 по 15 февраля 1909 года. По горизонтали указываются числа месяца, по вертикали — количество осадков, выпавших в соответствующий день, в миллиметрах. Для наглядности жирные точки на рисунке соединены линией. Определите по рисунку, сколько дней из данного периода не выпадало осадков.



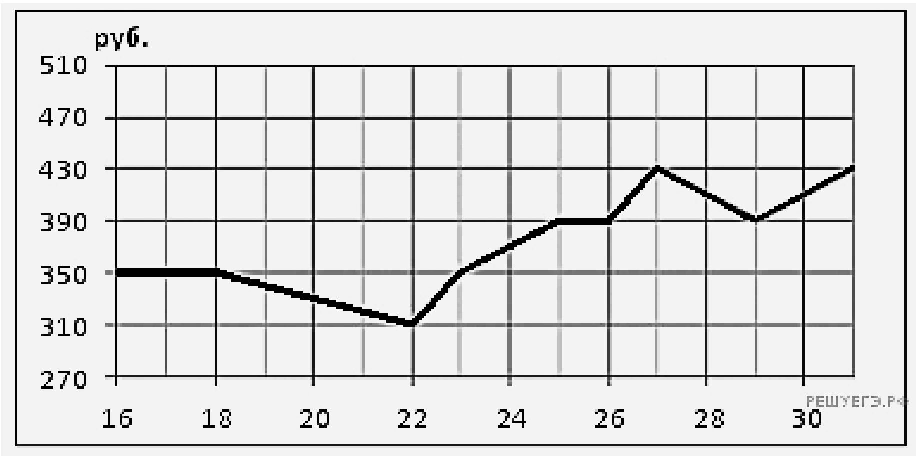
Решение.

Из графика видно, что 4 дня из данного периода (5, 8, 9, 12 февраля) не выпадало осадков (см. рисунок).

Ответ: 4.

<u>**или**</u>

На рисунке показано изменение биржевой стоимости акций горно-обогатительного комбината во второй половине октября. 18 октября бизнесмен приобрёл 480 акций этого комбината. Треть своих акций он продал 25 октября, а оставшиеся акции — 27 октября. Сколько рублей приобрёл бизнесмен в результате этих операций?



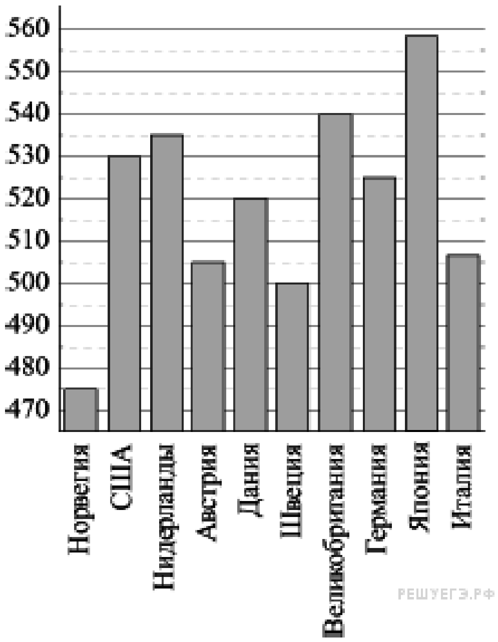
Решение.

В день покупки акции стоили 480 · 350 = 168 000 руб. Стоимость акций, проданных 25 октября, была равна 1/3 · 480 · 390 = 62 400 руб. Стоимость акций, проданных 27 октября равна 2/3 · 480 · 430 = 137 600 руб. Прибыль бизнесмена составила 62 400 + 137 600 − 168 000 = 32 000 руб.

Ответ: 32 000.

<u>или</u>

На диаграмме показан средний балл участников 10 стран в тестировании учащихся 4-го класса, по математике в 2007 году (по 1000-балльной шкале). По данным диаграммы найдите число стран, в которых средний балл ниже, чем в Нидерландах.



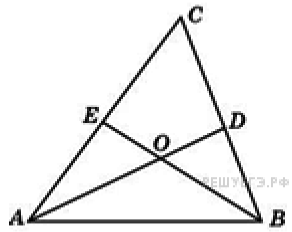
Решение.

Из диаграммы видно, что число стран, в которых средний балл по математике ниже чем в Нидерландах равно семи.

Ответ: 7.

3 ***<u>Планиметрия : вычисление длин, углов и площадей</u>***

В треугольнике *ABC* угол *C* равен 58°, *AD* и *BE*— биссектрисы, пересекающиеся в точке *O*. Найдите угол *AOB*. Ответ дайте в градусах.



Решение.

Рассмотрим угол *AOB* в треугольнике *AOB*:

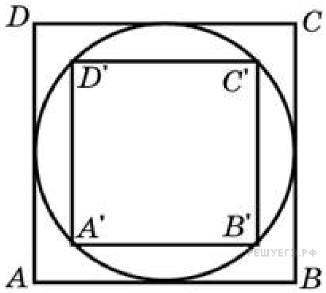
$$\angle AOB = 180^\circ - (\angle OAB + \angle OBA) = 180^\circ - \frac{1}{2}(\angle A + \angle B) =$$

$$= 180^\circ - \frac{1}{2}(180^\circ - \angle C) = 180^\circ - 61^\circ = 119^\circ.$$

Ответ: 119.

<u>или</u>

Во сколько раз площадь квадрата, описанного около окружности, больше площади квадрата, вписанного в эту окружность?



Решение.

Пусть радиус окружности равен R. Тогда сторона описанного вокруг нее квадрата равна $2R$, а его площадь, равная квадрату стороны, равна $4R^2$. Диагональ вписанного квадрата также равна $2R$, поэтому его площадь, равная половине произведения диагоналей, равна $2R^2$. Следовательно, отношение площади описанного квадрата к площади вписанного равно 2.

Ответ: 2.

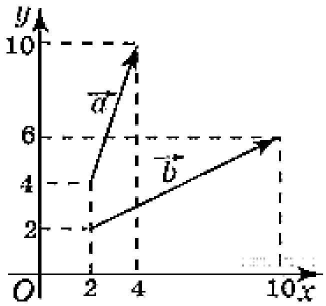
<u>или</u>

Найдите угол между векторами $\vec{a}$ и $\vec{b}$. Ответ дайте в градусах.

Решение.

Координаты вектора равны разности координат конца вектора и его начала. Поэтому вектор $\vec{a}$ имеет координаты (2; 6), вектор $\vec{b}$ имеет координаты (8; 4). Скалярное произведение векторов равно

$(\vec{a}, \vec{b}) = x_1 \cdot x_2 + y_1 \cdot y_2 = 2 \cdot 8 + 6 \cdot 4 = 40$



С другой стороны, скалярное произведение двух векторов равно произведению их длин на косинус угла между ними. Длина вектора $\vec{a}$: $a = \sqrt{2^2 + 6^2} = \sqrt{40}$, длина вектора $\vec{b}$: $b = \sqrt{8^2 + 4^2} = \sqrt{80}$.

Тогда получаем: $a \cdot b \cdot cos\alpha = 40$, откуда

$cos\alpha = \frac{40}{ab} = \frac{\sqrt{2}}{2}, \alpha = 45°$

Ответ:45

4 ***<u>Начала теории вероятностей</u>***

В случайном эксперименте бросают две игральные кости. Найдите вероятность того, что в сумме выпадет 10 очков. Результат округлите до сотых.

Решение.

Количество исходов, при которых в результате броска игральных костей выпадет 10 очков, равно 3: 4+6, 5+5, 6+4. Каждый из кубиков может выпасть шестью вариантами, поэтому общее число исходов равно 6·6 = 36. Следовательно, вероятность того, что в сумме выпадет 10 очков, равна

$\frac{3}{36} = 0{,}083$

Ответ: 0,08.

<u>или</u>

За круглый стол на 9 стульев в случайном порядке рассаживаются 7 мальчиков и 2 девочки. Найдите вероятность того, что обе девочки будут сидеть рядом.

Решение.

Пусть первой за стол сядет девочка, рядом с ней есть два места, на каждое из которых может сесть 8 человек, из которых только одна девочка. Таким образом вероятность, что девочки будут сидеть рядом равна $\frac{2}{5} = 0{,}25$

Ответ: 0,25.

<u>или</u>

Перед началом футбольного матча судья бросает монетку, чтобы определить, какая из команд начнёт игру с мячом. Команда «Физик»

играет три матча с разными командами. Найдите вероятность того, что в этих играх «Физик» выиграет жребий ровно два раза.

Решение.

Обозначим «1» ту сторону монеты, которая отвечает за выигрыш жребия «Физиком», другую сторону монеты обозначим «0». Тогда благоприятных комбинаций три: 110, 101, 011, а всего комбинаций $2^3 = 8$: 000, 001, 010, 011, 100, 101, 110, 111. Тем самым, искомая вероятность равна:

$\frac{3}{8} = 0{,}375$

Ответ: 0,375.

<u>Простейшие уравнения</u>

Решите уравнение $\log_5(7 - x) = \log_5(3 - x) + 1$.

Решение.

5 Заметим, что $1 = \log_5 5$ и используем формулу $\log_a b + \log_a c = \log_a bc$ Имеем:

$$\log_5(7 - x) = \log_5(3 - x) + 1 \Leftrightarrow \log_5(7 - x) = \log_5(3 - x) + \log_5 5 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 3 - x > 0, \\ 7 - x = 5(3 - x) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -x > -3 \\ 7 - x = 15 - 5x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x < 3 \\ x = 2 \end{cases} \Leftrightarrow x = 2$$

Ответ: 2.

<u>или</u>

Найдите корень уравнения: $\sqrt{-72 - 17x} = -x$. Если уравнение имеет более одного корня, укажите меньший из них.

Решение.

Возведем в квадрат:

$$\sqrt{-72 - 17x} = -x\ ; \begin{cases} -72 - 17x = x^2 \\ -x \ge 0 \end{cases}; \begin{cases} \left[\begin{matrix} x=-9 \\ x=-8 \end{matrix}\right. \\ x \le 0 \end{cases}; \left[\begin{matrix} x=-9 \\ x=-8 \end{matrix}\right..$$

Меньший корень равен −9.

Ответ: −9.

<u>или</u>

Решите уравнение $2^{3+x} = 0{,}4 \cdot 5^{3+x}$.

Решение.

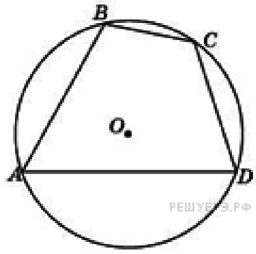
Перейдем к одному основанию степени:

$$2^{3+x} = 0{,}4 \cdot 5^{3+x} \Leftrightarrow \frac{2^{3+x}}{5^{3+x}} = 0{,}4 \Leftrightarrow \left(\frac{2}{5}\right)^{3+x} = \left(\frac{2}{5}\right)^1 \Leftrightarrow 3 + x = 1 \Leftrightarrow x = -2.$$

Ответ: −2.

6 ***<u>Планиметрия : задачи , связанные с углами</u>*.**

Точки *A, B, C, D,* расположенные на окружности, делят эту окружность на четыре дуги *AB, BC, CD и AD,* градусные величины которых относятся соответственно как 4:2:3:6. Найдите угол A четырехугольника *ABCD.* Ответ дайте в градусах.



Решение.

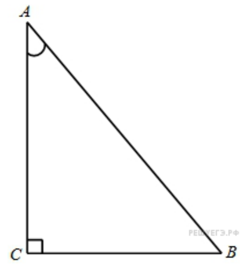
Пусть дуга *AB* равна *4x,* тогда $4x+2x+3x+6x=360^\circ \Leftrightarrow x=24^\circ.$ Вписанный угол равен половине дуги, на которую он опирается, значит,

$$\angle A=\frac{1}{2}(\cup BC+\cup CD)=\frac{1}{2}(2x+3x)=\frac{120^\circ}{2}=60^\circ.$$

Ответ: 60.

<u>или</u>

В треугольнике *ABC* угол C равен 90°, $\mathbf{\cos A=\frac{4}{\sqrt{17}}}$**.**
Найдите tg *A.*



Решение.

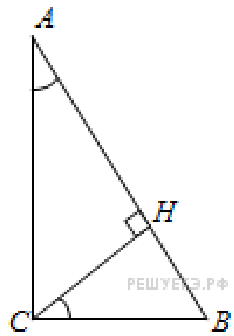
Имеем:

$$\operatorname{tg} A=\frac{\sin A}{\cos A}=\frac{\sqrt{1-\cos^2 A}}{\cos A}=\frac{\sqrt{1-\frac{16}{17}}}{\frac{4}{\sqrt{17}}}=\frac{1}{\sqrt{17}}\cdot\frac{\sqrt{17}}{4}=0,25.$$

Ответ: 0,25.

<u>или</u>

В треугольнике *ABC* угол *C* равен *90°, CH* – высота,
***BC* = 4$\sqrt{5}$, *BH* = 4. Найдите *tg A*.**



*Решение***.**

Углы *A* и *HCB* равны как углы со взаимно перпендикулярными сторонами.

$$\operatorname{tg} A=\operatorname{tg}\angle HCB=\frac{HB}{CH}=\frac{HB}{\sqrt{CB^2-HB^2}}=\frac{4}{\sqrt{80-16}}=0,5.$$

Ответ: 0,5.

7 ***<u>Производная и первообразная</u>*.**

Прямая y= -4x - 11 является касательной к графику функции y = $\mathbf{x^3+7x^2+7x-6}$**. Найдите абсциссу точки касания.**

Решение.

Условие касания графика функции $y=f(x)$ и прямой $y=kx+b$ задаётся системой требований:

$\begin{cases} f'(x) = k \\ f(x) = kx + b \end{cases}$ В нашем случае имеем:

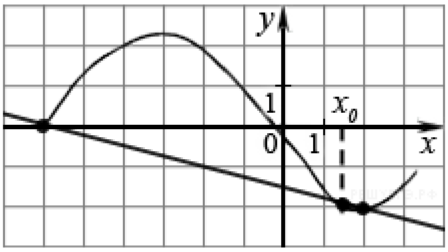
$$\begin{cases} 3x^2 + 14x + 7 = -4 \\ x^3 + 7x^2 + 7x - 6 = -4x - 11 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} 3x^2 + 14x + 11 = 0 \\ x^3 + 7x^2 + 11x + 5 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} x = -\frac{11}{3} \\ x = -1 \end{array} \right. \\ x^3 + 7x^2 + 11x + 5 = 0 \; (*) \end{cases}$$

Проверка подстановкой показывает, что первый корень не удовлетворяет, а второй удовлетворяет уравнению (*). Поэтому искомая абсцисса точки касания −1.

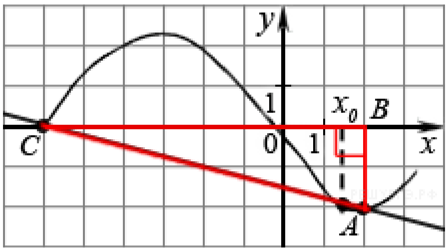
Ответ: −1

или



На рисунке изображён график функции *y=f(x)* и касательная к нему в точке с абсциссой x_0. Найдите значение производной функции *f(x)* в точке x_0.

Решение.



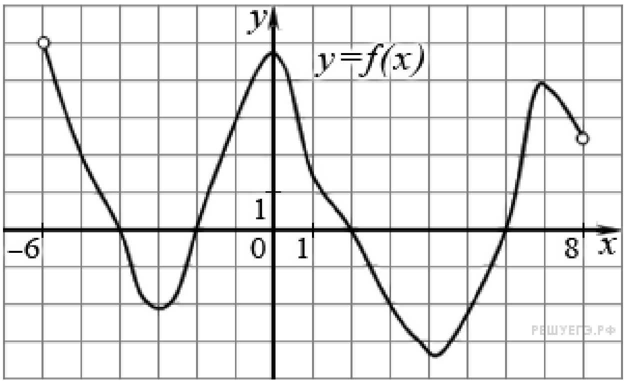
Значение производной в точке касания равно угловому коэффициенту касательной, который в свою очередь равен тангенсу угла наклона данной касательной к оси абсцисс. Построим треугольник с вершинами в точках *A* (2; −2), *B* (2; 0), *C* (−6; 0). Угол наклона касательной к оси абсцисс будет равен углу, смежному с углом *ACB*:

$$y'(x_0) = \operatorname{tg}(180^\circ - \angle ACB) = -\operatorname{tg}\angle ACB = -\frac{AB}{BC} = -\frac{2}{8} = -0{,}25.$$

Ответ: −0,25.

или

На рисунке изображен график функции $y = f(x)$, определенной на интервале (−6; 8). Определите количество целых точек, в которых производная функции положительна.



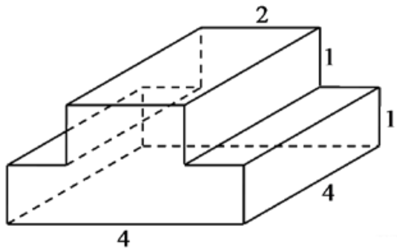
Решение.

Производная функции положительна на тех интервалах, на которых функция возрастает, т. е. на интервалах (−3; 0) и (4,2; 7). В них содержатся целые точки −2, −1, 5 и 6, всего их 4.

Ответ: 4.

8 ***Стереометрия.***

Найдите площадь поверхности многогранника, изображенного на рисунке (все двугранные углы прямые).



Решение.

Площадь поверхности заданного многогранника равна сумме площадей прямоугольников со сторонами 2, 1, 4 и 4, 4, 1 уменьшенной на удвоенную площадь прямоугольника со сторонами 2, 4:

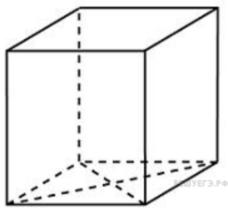
$$S = 2(4\cdot 4 + 1\cdot 4 + 1\cdot 4) + 2(2\cdot 1 + 2\cdot 4 + 1\cdot 4) - 2(2\cdot 4) = 60.$$

Ответ: 60

или

В основании прямой призмы лежит ромб с диагоналями, равными 6 и 8. Площадь ее поверхности равна 248. Найдите боковое ребро этой призмы.

Решение.



Сторона ромба a выражается через его диагонали d_1 и d_2 как

$$a = \frac{1}{2}\sqrt{d_1^2 + d_2^2} = 5.$$

Площадь ромба $S_P = \frac{1}{2}d_1 d_2 = 24$.

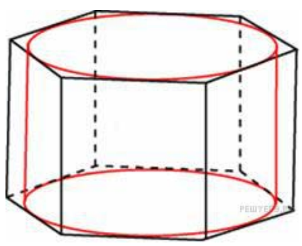
Тогда боковое ребро найдем из выражения для площади поверхности:

$$S = 2S_{\text{ромба}} + 4aH \Leftrightarrow H = \frac{S - 2S_{\text{ромба}}}{4a} = \frac{248 - 48}{20} = 10.$$

Ответ: 10.

или

Найдите площадь боковой поверхности правильной шестиугольной призмы, описанной около цилиндра, радиус основания которого равен $\sqrt{3}$, а высота равна 2.



Решение.

Сторона правильного шестиугольника a выражается через радиус r вписанной в него окружности формулой $a=\frac{2}{\sqrt{3}}r$. Тогда площадь боковой поверхности призмы выражается формулой

$$S = P_{\text{осн}}H = 6aH = \frac{12}{\sqrt{3}}rH = 12\cdot 2 = 24.$$

Ответ: 24.

Не забудьте перенести все ответы в бланк ответов № 1

ЧАСТЬ 2

9 ***Вычисления и преобразования*.**

Найдите значение выражения $\frac{7\sqrt{x}-5}{\sqrt{x}}+\frac{5\sqrt{x}}{x}+3x-4$ при *x=3*.

Решение.

Поскольку $\frac{\sqrt{x}}{x}=\frac{1}{\sqrt{x}}$, имеем:

$\frac{7\sqrt{x}-5}{\sqrt{x}}+\frac{5\sqrt{x}}{x}+3x-4=\frac{\sqrt{x}-5+5}{\sqrt{x}}$ **+3x-4=3x+3=12**

Ответ: 12.

или

Найдите значение выражения $\log_5 9\log_3 25$.

*Решение***.**

Выполним преобразования:

$$\log_5 9\cdot\log_3 25=2\log_5 3\cdot 2\log_3 5=4.$$

Ответ: 4.

или

Найдите значение выражения $\frac{5\sin 98°}{\sin 49°\sin 41°}$.

Решение.

Выполним преобразования:

$$\frac{5\sin 98^\circ}{\sin 49^\circ\cdot\sin 41^\circ}=\frac{5\sin 98^\circ}{\sin 49^\circ\cdot\sin(90^\circ-49^\circ)}=\frac{5\cdot 2\sin 49^\circ\cos 49^\circ}{\sin 49^\circ\cos 49^\circ}=10$$

Ответ: 10.

10 ***Задачи с прикладным содержанием* .**

Небольшой мячик бросают под острым углом $\propto$ к плоской горизонтальной поверхности земли. Расстояние, которое пролетает мячик, вычисляется по формуле $L=\frac{v_0^2}{g}sin\,2\propto$ (м), где $v_0=20$ м/с – начальная скорость мячика, а g – ускорение свободного падения (считайте g = *10 м/с²*). При каком наименьшем значении угла (в градусах) мячик перелетит реку шириной 20м?

Решение.

Задача сводится к решению неравенства $L\geq 20$ на интервале $(0°;90°)$ при заданных значениях начальной скорости $v_0=20$м/с и ускорения свободного падения $g=10$м/с^2 :

$$\frac{20^2}{10}\sin 2\alpha\geq 20\Leftrightarrow\sin 2\alpha\geq\frac{1}{2}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 30^\circ + 360^\circ n \le 2\alpha \le 150^\circ + 360^\circ n \underset{0^\circ<2\alpha<180^\circ}{\Leftrightarrow}$$
$$\underset{0^\circ<2\alpha<180^\circ}{\Leftrightarrow} 30^\circ \le 2\alpha \le 150^\circ \underset{0^\circ<\alpha<90^\circ}{\Leftrightarrow} 15^\circ \le \alpha \le 75^\circ.$$

Ответ: 15.

<u>или</u>

Локатор батискафа, равномерно погружающегося вертикально вниз, испускает ультразвуковые импульсы частотой 749 МГц. Скорость спуска батискафа, выражаемая в м/с, определяется по формуле $v=c\,\frac{f-f_0}{f+f_0}$, где c=1500 м/с – скорость звука в воде, f_0 – частота испускаемых импульсов (в МГц), f – частота отражённого от дна сигнала, регистрируемая приёмником (в МГц). Определите наибольшую возможную частоту отраженного сигнала f, если скорость погружения батискафа не должна превышать 2 м/с.

Решение.

Задача сводится к решению неравенства $v \le 2$ м/с при известных значениях $c = 1500$ м/с – скорости звука в воде и $f_0 = 749$ МГц – частоты испускаемых импульсов:

$$v \le 2 \Leftrightarrow 1500 \cdot \frac{f-749}{f+749} \le 2 \Leftrightarrow 750 \cdot \frac{f-749}{f+749} \le 1 \Leftrightarrow 750f - 750 \cdot 749 \le f + 749 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow 749f \le 749 \cdot 751 \Leftrightarrow f \le 751 \text{ МГц.}$$

Ответ: 751

<u>или</u>

При движении ракеты её видимая для неподвижного наблюдателя длина, измеряемая в метрах, сокращается по закону $l = l_0\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}$, где $l_0 = 5$ м – длина покоящейся ракеты, c=$3\cdot10^5$ км/с – скорость света, а v – скорость ракеты (в км/с). Какова должна быть минимальная скорость ракеты, чтобы её наблюдаемая длина стала не более 4 м? Ответ выразите в км/с.

Решение.

Найдем, при какой скорости длина ракеты станет равна 4 м. Задача сводится к решению уравнения $l_0\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}} = 4$ при заданном значении длины покоящейся ракеты $l_0 = 5$м и известной величине скорости света $c = 3 \cdot 10^5$км/с:

$$5\sqrt{1-\frac{v^2}{9\cdot 10^{10}}}=4 \Leftrightarrow 1-\frac{v^2}{9\cdot 10^{10}}=\frac{16}{25} \Leftrightarrow \frac{v^2}{9\cdot 10^{10}}=\frac{9}{25} \Leftrightarrow v^2=\frac{81}{25}\cdot 10^{10} \Leftrightarrow v=180000$$ км/с.

Если скорость будет превосходить найденную, то длина ракеты будет менее 4 метров, поэтому минимальная необходимая скорость равна 180 000 км/с.

Ответ: 180000.

11 ***Текстовые задачи***.

Баржа в 10:00 вышла из пункта A в пункт B, расположенный в 15 км от A. Пробыв в пункте B 1 час 20 минут, баржа отправилась назад и вернулась в пункт A в 16:00. Определите (в км/час) скорость течения реки, если известно, что собственная скорость баржи равна 7 км/ч.

Решение.

Пусть u км/ч – скорость течения реки, тогда скорость баржи по течению равна $7+u$ км/ч, а скорость баржи против течения равна $7-u$ км/ч. Баржа вернулась в пункт A через 6 часов, но пробыла в пункте B 1 час 20 минут, поэтому общее время движения баржи дается уравнением:

$$\frac{15}{7-u}+\frac{15}{7+u}=6-\frac{4}{3} \Leftrightarrow \frac{15\cdot(7+u)+15\cdot(7-u)}{49-u^2}=\frac{14}{3} \Leftrightarrow$$

$$\underset{u>0}{\Leftrightarrow} 30\cdot 7\cdot 3=14\cdot 49-14u^2 \Leftrightarrow u^2=4 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} u=2; \\ u=-2 \end{array}\right. \underset{u>0}{\Leftrightarrow} u=2.$$

Поэтому скорость течения реки равна 2 км/ч.

Ответ: 2.

<u>или</u>

Имеется два сплава. Первый сплав содержит 5% меди, второй — 14% меди. Масса второго сплава больше массы первого на 7 кг. Из этих двух сплавов получили третий сплав, содержащий 10% меди. Найдите массу третьего сплава. Ответ дайте в килограммах.

*Решение***.**

Пусть масса первого сплава m_1 кг, а масса второго – m_2 кг. Тогда массовое содержание меди в первом и втором сплавах $0{,}05m_1$ и $0{,}14m_2$, соответственно. Из этих двух сплавов получили третий сплав m_3 кг, содержащий 10% меди. Получаем систему уравнений:

$$\begin{cases} m_1+m_2=m_3 \\ 0.05m_1+0.14m_2=0.1m_3 \\ m_2-m_1=7 \end{cases};$$

$$\begin{cases} m_3=7+2m_1 \\ m_2=7+m_1 \\ 0.05m_1+0.14(7+m_1)=0{,}1(7+2m_1) \end{cases}; \qquad m_1=\ 28;\ \ m_2=35$$

Тогда масса третьего сплава равна: $28+35=63$ кг

Ответ: 63.

<u>или</u>

Двое рабочих, работая вместе, могут выполнить работу за 12 дней. За сколько дней, работая отдельно, выполнит эту работу первый рабочий, если он за два дня выполняет такую же часть работы, какую второй – за три дня?

Решение.

Обозначим v_1 и v_2 — объёмы работ, которые выполняют за день первый и второй рабочий, соответственно, полный объём работ примем за 1. Тогда по условию задачи $12(v_1+v_2)=1$ и $2v_1=3v_2$. Решим полученную систему:

$$\begin{cases} 12(v_1+v_2)=1, \\ 2v_1=3v_2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 12\left(v_1+\dfrac{2}{3}v_1\right)=1, \\ v_2=\dfrac{2}{3}v_1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} v_1=\dfrac{1}{20}, \\ v_2=\dfrac{1}{30}. \end{cases}$$

Тем самым, первый рабочий за день выполняет одну двадцатую всей работы, значит, работая отдельно, он справится с ней за 20 дней.

Ответ: 20.

12 ***<u>Наибольшее и наименьшее значение функции.</u>***

Найдите точку максимума функции y = - $\frac{x^2+289}{x}$

Решение.

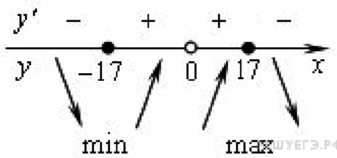
Найдем производную заданной функции:

$$y'=-\left(\frac{x^2+289}{x}\right)'=-\left(x+\frac{289}{x}\right)'=-\left(1-\frac{289}{x^2}\right)=\frac{289-x^2}{x^2}.$$

Найдем нули производной:

$$x^2=289 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=17, \\ x=-17. \end{array}\right.$$

Определим знаки производной функции и изобразим на рисунке поведение функции:



Искомая точка максимума $x=17$.

Ответ: 17.

<u>или</u>

Найдите наименьшее значение функции y =(3x^2 -36 x +36) e^{x-10} на отрезке $[8; 11]$

Решение.

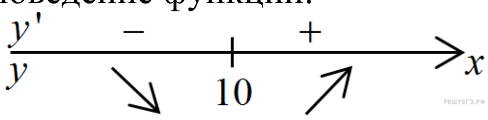
Найдем производную заданной функции:

$$y' = (3x^2 - 36x + 36)' e^{x-10} + (3x^2 - 36x + 36)(e^{x-10})' =$$
$$= (6x - 36)e^{x-10} + (3x^2 - 36x + 36)e^{x-10} = (3x^2 - 30x)e^{x-10} = 3x(x-10)e^{x-10}.$$

Найдем нули производной на заданном отрезке:

$$\begin{cases} 3x(x-10)e^{x-10} = 0, \\ 8 \le x \le 11. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} x = 0, \\ x = 10, \end{array}\right. \\ 8 \le x \le 11 \end{cases} \Leftrightarrow x = 10.$$

Определим знаки производной функции и изобразим на рисунке поведение функции:



В точке $x = 10$ заданная функция имеет минимум, являющийся ее наименьшим значением на заданном отрезке. Найдем это наименьшее значение: $y(10) = 3 \cdot 100 - 36 \cdot 10 + 36 = -24$.

Ответ: −24.

<u>или</u>

Найдите наибольшее значение функции $8\ln(x+7) - 8x + 3$ на отрезке $[-6.5; 0]$

Решение.

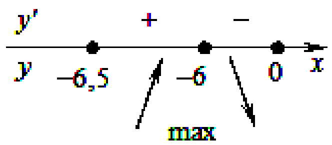
Найдем производную заданной функции:

$$y' = \frac{8}{x+7} - 8.$$

Найдем нули производной на заданном отрезке:

$$\begin{cases} \dfrac{8}{x+7} - 8 = 0, \\ -6{,}5 \le x \le 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{1}{x+7} = 1, \\ -6{,}5 \le x \le 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -6, \\ -6{,}5 \le x \le 0 \end{cases} \Leftrightarrow x = -6.$$

Определим знаки производной функции на заданном отрезке и изобразим на рисунке поведение функции:



В точке $x = -6$ заданная функция имеет максимум, являющийся ее наибольшим значением на заданном отрезке. Найдем это наибольшее значение:

$$y(-6) = 8\ln 1 + 8 \cdot 6 + 3 = 51.$$

Ответ: 51.

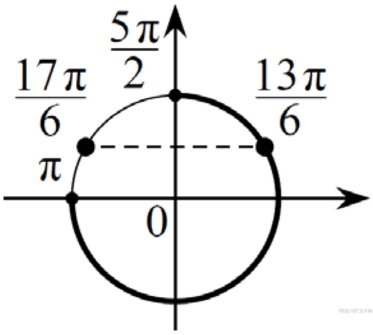
Не забудьте перенести все ответы в бланк ответов № 1

Для записи решений и ответов на задания 13-19 используйте БЛАНК ОТВЕТОВ №2. Запишите сначала номер выполняемого задания (13,14 и т.д.), а затем полное обоснованное решение и ответ. Ответы записывайте чётко и разборчиво.

13 ***Уравнения, системы уравнений***.

а) Решите уравнение $4cos^2x + 4cos\left(\frac{\pi}{2} + x\right)$-1=0

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[\pi, \frac{5\pi}{2}\right]$.



Решение.

а) Запишем уравнение в виде

$$4-4\sin^2 x-4\sin x-1=0 \Leftrightarrow$$

$$4\sin^2 x+4\sin x-3=0 \Leftrightarrow (2\sin x+3)(2\sin x-1)=0$$

Значит, или $\sin x=-\frac{3}{2}$ — уравнение не имеет корней, или $\sin x=\frac{1}{2}$, откуда $x=\frac{\pi}{6}+2\pi n, x=\frac{5\pi}{6}+2\pi n, n\in\mathbb{Z}.$

б) С помощью числовой окружности отберем корни уравнения, принадлежащие отрезку $\left[\pi, \frac{5\pi}{2}\right]$. Получим число $\frac{13\pi}{6}$.

Ответ: а) $\frac{\pi}{6}+2\pi n, \frac{5\pi}{6}+2\pi n, n\in\mathbb{Z};$ *б)* $\frac{13\pi}{6}$.

<u>или</u>

Решите уравнение: $\sqrt{\sin x \cos x}\left(\frac{1}{tg2x} + 1\right)$= 0

Решение.

Преобразуем уравнение:

$$\sqrt{\sin x\cos x}\left(\frac{1}{\operatorname{tg}2x}+1\right)=0. \Leftrightarrow \sqrt{\frac{1}{2}\sin 2x}\left(\frac{\operatorname{tg}2x+1}{\operatorname{tg}2x}\right)=0.$$

Откуда получаем, что

$$\begin{cases}\sin 2x=0,\\ \operatorname{tg}2x\neq 0.\end{cases} \text{ или } \begin{cases}\operatorname{tg}2x+1=0,\\ \sin 2x\geq 0,\\ \operatorname{tg}2x\neq 0\end{cases}$$

В первом случае решений нет. Во втором случае:

$$\begin{cases} \operatorname{tg} 2x + 1 = 0, \\ \sin 2x \ge 0, \\ \operatorname{tg} 2x \ne 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \operatorname{tg} 2x = -1, \\ \sin 2x > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x = -\dfrac{\pi}{4} + \pi k,\ k \in \mathbb{Z}., \\ \sin 2x > 0. \end{cases} \Leftrightarrow 2x = \dfrac{3\pi}{4} + 2\pi k,\ k \in \mathbb{Z}. \Leftrightarrow x = \dfrac{3\pi}{8} + \pi k,\ k \in \mathbb{Z}.$$

Ответ: $\dfrac{3\pi}{8} + \pi k,\ k \in \mathbb{Z}.$

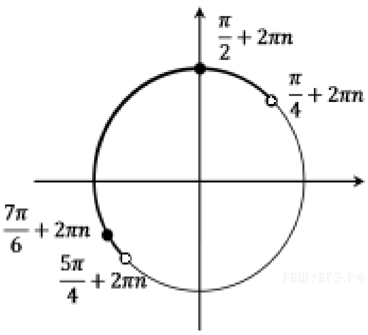
<u>или</u>

Решите уравнение $\dfrac{\cos 2x + \sin x}{\sqrt{\sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right)}} = 0$

Решение.

Найдем область определения уравнения:

$$\sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right) > 0 \Leftrightarrow 2\pi n < x - \frac{\pi}{4} < \pi + 2\pi n \Leftrightarrow \frac{\pi}{4} + 2\pi n < x < \frac{5\pi}{4} + 2\pi n,\ n \in \mathbb{Z}.$$



Найдем корни числителя, используем формулу $\cos 2\alpha = 1 - 2\sin^2 \alpha$:

$$\cos 2x + \sin x = 0 \Leftrightarrow 2\sin^2 x - \sin x - 1 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \sin x = 1, \\ \sin x = -0{,}5. \end{array}\right.$$

Откуда, $x = \dfrac{\pi}{2} + 2\pi k,\ x = -\dfrac{\pi}{6} + 2\pi k,\ x = \dfrac{7\pi}{6} + 2\pi k,\ k \in \mathbb{Z}.$

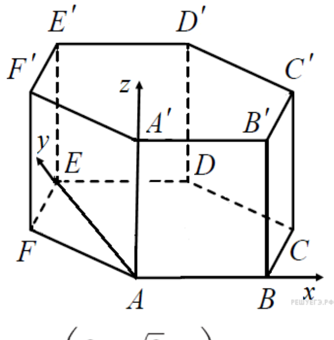
С учетом области определения уравнения получаем:

$$x = \frac{\pi}{2} + 2\pi k, \quad x = \frac{7\pi}{6} + 2\pi k, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Ответ: $x = \dfrac{\pi}{2} + 2\pi k,\ x = \dfrac{7\pi}{6} + 2\pi k,\ k \in \mathbb{Z}.$

14 ***<u>Углы и расстояния в пространстве.</u>***

В правильной шестиугольной призме *ABCDEFA'B'C'D'E'F'* все ребра равны 1. Найдите угол между прямой *AC'* и плоскостью *ACD'*.



Решение.

Введем прямоугольную систему координат, как показано на рисунке. В этой системе координат:

$A(0;0;0),\ C\left(\dfrac{3}{2};\dfrac{\sqrt{3}}{2};0\right),\ C'\left(\dfrac{3}{2};\dfrac{\sqrt{3}}{2};1\right),\ D'\left(1;\sqrt{3};1\right)$, откуда $\vec{AC'} = \left(\dfrac{3}{2};\dfrac{\sqrt{3}}{2};1\right)$.

Плоскость ACD' проходит через начало координат, ее уравнение имеет вид $Ax + By + Cz = 0$. Для координат точек C и D' имеем систему уравнений:

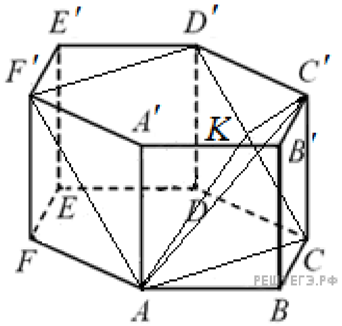
$$\begin{cases} \dfrac{3}{2}A + \dfrac{\sqrt{3}}{2}B + 0C = 0, \\ A + \sqrt{3}B + C = 0. \end{cases}$$

Не теряя общности, положим $A = 1$, тогда $B=-\sqrt{3}, C=2$. Уравнение плоскости ACD': $x-\sqrt{3}y+2z=0$, вектор нормали к ней: $\vec{n}=(1;-\sqrt{3};2)$. Тогда искомый угол между прямой AC' и плоскостью ACD' равен

$$\arcsin\frac{|\vec{AC}\cdot\vec{n}|}{|\vec{AC}||\vec{n}|}=\arcsin\frac{\left|\frac{3}{2}-\frac{3}{2}+2\right|}{\sqrt{8}\cdot\sqrt{\frac{9}{4}+\frac{3}{4}+1}}=\arcsin\frac{1}{2\sqrt{2}}.$$

Ответ: $\arcsin\frac{1}{2\sqrt{2}}$

Приведем другое решение.



$\angle C'AK$ — искомый, так как это угол между прямой и ее проекцией AK.

$\angle C'KA=90^\circ$, так как $ACD'\perp CC'D$ в силу того, что $AC\perp CC$ и $AC\perp CD$.

Рассмотрим $\Delta AC'K$: $AC'=\sqrt{AC^2+CC'^2}=\sqrt{\sqrt{3}^2+1^2}=2$;

$KC'=\frac{1}{2}C'D=\frac{1}{2}\sqrt{2}=\frac{\sqrt{2}}{2}$

(т.к. $C'D$ — диагональ квадрата $CC'DD'$)

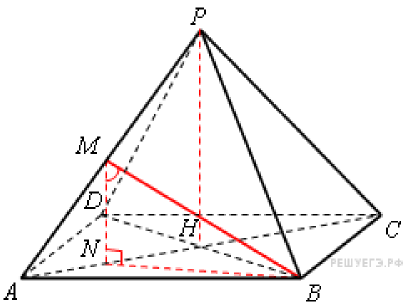
$$\angle C'AK=\arcsin\left(\frac{\sqrt{2}}{2\cdot 2}\right)=\arcsin\left(\frac{\sqrt{2}}{4}\right).$$

Ответ: $\arcsin\frac{\sqrt{2}}{4}$.

<u>или</u>

Длины всех ребер правильной четырехугольной пирамиды *PABCD* равны между собой. Найдите угол между прямыми *PH* и *BM*, если отрезок *PH* — высота данной пирамиды, точка *M* — середина ее бокового ребра *AP*

Решение.



Пусть отрезок MN — средняя линия треугольника APH, параллельная его стороне PH (см. рисунок). Поскольку $PABCD$ — правильная пирамида, точка H — центр квадрата $ABCD$. Так как $PH\perp(ABC)$ и $MN\parallel PH$, то $MN\perp(ABC)$, а, значит, $MN\perp BN$, прямые MN и PH параллельны, следовательно, угол между прямыми PH и BM равен углу между прямыми MN и BM, то есть острому углу BMN прямоугольного треугольника BMN.

Примем длину ребра данной пирамиды за a,

тогда $MB=\frac{\sqrt{3}}{2}a, AH=PH=\frac{\sqrt{2}}{2}a, MN=\frac{1}{2}PH=\frac{\sqrt{2}}{4}a$

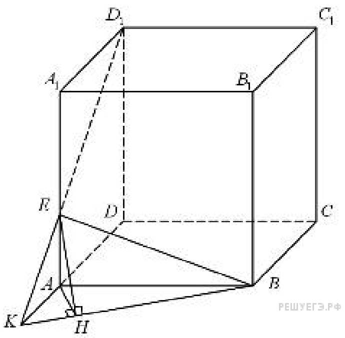
и, следовательно, $\cos\angle BMN=\frac{MN}{MB}=\frac{\sqrt{6}}{6}, \angle BMN=\arccos\frac{\sqrt{6}}{6}$.

Ответ: $\angle BMN = \arccos \dfrac{\sqrt{6}}{6}.$

<u>или</u>

В правильной четырёхугольной призме $ABCDA_1B_1C_1D_1$ стороны основания равны 2, а боковые рёбра равны 3. На ребре AA_1 отмечена точка E так, что $AE:EA_1=1:2$. Найдите угол между плоскостями ABC и BED_1.

Решение.



Прямая D_1E пересекает прямую AD в точке K. Плоскости ABC и BED_1 пересекаются по прямой KB.

Из точки E опустим перпендикуляр EH на прямую KB, тогда отрезок AH (проекция EH) перпендикулярен прямой KB. Угол AHE является линейным углом двугранного угла, образованного плоскостями ABC и BED_1.

Поскольку $AE : EA_1 = 1 : 2$, получаем:

$AE = \dfrac{AA_1}{3} = 1; EA_1 = AA_1 - AE = 2.$

Из подобия треугольников A_1D_1E и AKE находим:

$$AK = \frac{AE}{EA_1} \cdot A_1D_1 = 1.$$

В прямоугольном треугольнике AKB с прямым углом A: $AB=2$; $AK=1$; $BK = \sqrt{AB^2 + AK^2} = \sqrt{5}$, откуда высота

$$AH = \frac{AK \cdot AB}{BK} = \frac{2\sqrt{5}}{5}.$$

Из прямоугольного треугольника AHE с прямым углом A получаем:

$$\operatorname{tg} \angle AHE = \frac{AE}{AH} = \frac{\sqrt{5}}{2} \Leftrightarrow \angle AHE = \operatorname{arctg} \frac{\sqrt{5}}{2}.$$

Ответ может быть представлен и в другой форме:

$\angle AHE = \arcsin \dfrac{\sqrt{5}}{3}$ или $\angle AHE = \arccos \dfrac{2}{3}.$

Ответ: $\operatorname{arctg} \dfrac{\sqrt{5}}{2}.$

15	***<u>Неравенства.</u>***

Решите систему неравенств: $\begin{cases} \log_{x+1}(2x-5) + \log_{2x-5}(x+1) \le 2 \\ 25^x - 20^x - 2 \cdot 16^x \le 0 \end{cases}$

Решение.

Решим первое неравенство:

$$\log_{x+1}(2x-5)+\frac{1}{\log_{x+1}(2x-5)}\le 2.$$

Сделаем замену $y=\log_{x+1}(2x-5)$:

$$y+\frac{1}{y}\le 2;\frac{(y-1)^2}{y}\le 0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}y<0,\\ y=1.\end{array}\right.$$

Если $\log_{x+1}(2x-5)=1$, то

$$\begin{cases}x+1=2x-5,\\ x+1>0, & \Leftrightarrow x=6.\\ x+1\ne 1,\end{cases}$$

Если $\log_{x+1}(2x-5)<0$, то

$$\begin{cases}\dfrac{2x-5-1}{x+1-1}<0\\ x+1>0,\quad x+1\ne 1;\\ 2x-5>0\end{cases}\begin{cases}\dfrac{x-3}{x}<0\\ x>\dfrac{5}{2}\end{cases};$$

Решение первого неравенства: $\frac{5}{2}<x<3$ или $x=6$.

Решим второе неравенство. Разделим обе части на 16^x:

$$\left(\frac{5}{4}\right)^{2x}-\left(\frac{5}{4}\right)^{x}-2\le 0.$$

Сделаем замену $z=\left(\frac{5}{4}\right)^{x}$. Получаем: $z^2-z-2\le 0\Leftrightarrow -1\le z\le 2.$

Возвращаясь к исходной переменной, получаем: $\left(\frac{5}{4}\right)^{x}\le 2\Leftrightarrow x\le\log_{1,25}2.$

Решение второго неравенства: $x\le\log_{1,25}2.$

Пересечём полученные решения. Учитывая, что $3<\log_5 2<6$, находим множество решений системы: $\left(\frac{5}{2};\ 3\right)$.

Ответ: $\left(\frac{5}{2};\ 3\right)$.

или

Решите неравенство: $\log_{\log_x 2x}(6x-2)\ge 0$

*Решение***.**

Область допустимых значений неравенства задается соотношениями:

$$\begin{cases}\log_x 2x>0,\\ \log_x 2x\ne 1,\\ 6x-2>0\end{cases}\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\dfrac{1}{3}<x<\dfrac{1}{2};\\ x>1.\end{array}\right.$$

На области допустимых значений справедливы равносильности:

$$\log_a b\ge 0\Leftrightarrow\frac{b-1}{a-1}\ge 0,\ \log_a b-\log_a c\ge 0\Leftrightarrow\frac{b-c}{a-1}\ge 0,\ a^b-a^c\ge 0\Leftrightarrow(a-1)(b-c)\ge 0.$$

Поэтому на ОДЗ имеем:

$$\log_{\log_x 2x}(6x-2)\ge 0 \Leftrightarrow \frac{6x-3}{\log_x 2x-1}\ge 0 \Leftrightarrow \frac{3(2x-1)}{\log_x 2x-\log_x x}\ge 0 \Leftrightarrow \frac{2x-1}{x(x-1)}\ge 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 0<x\le \frac{1}{2}, \\ x>1. \end{array}\right.$$

С учетом ОДЗ получаем ответ.

Ответ: $\left(\frac{1}{3};\ \frac{1}{2}\right)\cup(1;\ +\infty).$

<u>или</u>

Решите неравенство $\dfrac{\log_{1-x}\left((3x+1)(1-2x+x^2)\right)}{\log_{3x+1}(1-x)}\le -1$

Решение.

Преобразуем неравенство:

$$\begin{cases} (\log_{1-x}(3x+1)+\log_{1-x}(1-x)^2)\cdot\log_{1-x}(3x+1)\le -1, \\ 3x+1\ne 1. \end{cases}$$

Сделаем замену: $y=\log_{1-x}(3x+1)$.

Получаем: $(y+2)y\le -1;\ (y+1)^2\le 0;\ y=-1.$

Сделаем обратную замену: $\log_{1-x}(3x+1)=-1$. Тогда

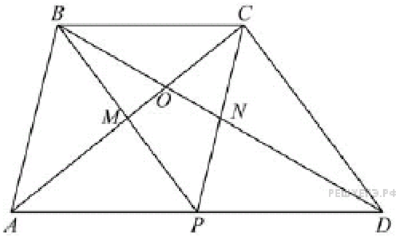
$$\begin{cases} (3x+1)(1-x)=1, \\ 1-x>0, \\ 1-x\ne 1, \\ 3x+1\ne 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -3x^2+2x=0, \\ x<1, \\ x\ne 0, \end{cases}$$

откуда $x=\frac{2}{3}.$ *Ответ:* $x=\frac{2}{3}.$

16 ***<u>Планиметрические задачи</u>.***

Площадь трапеции $ABCD$ равна 90, а одно из оснований трапеции вдвое больше другого. Диагонали пересекаются в точке *O*; отрезки, соединяющие середину *P* основания *AD* с вершинами *B* и *C*, пересекаются с диагоналями трапеции в точках *M* и *N* соответственно. Найдите площадь четырёхугольника *OMPN*.

Решение.



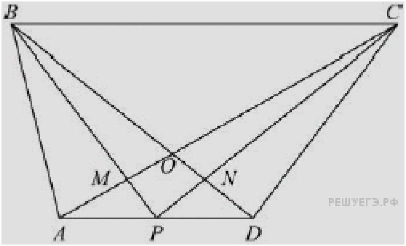
Пусть h — высота трапеции, а основания равны *a* и *2a*.Тогда

$$S_{ABCD}=\frac{a+2a}{2}h=\frac{3}{2}ah=90.$$

Откуда $ah=60$.

Четырёхугольники $ABCP$ и $BCDP$ — параллелограммы, поэтому *M* и *N* — середины *BP* и *CP* соответственно, значит, *CM* и *BN* — медианы треугольника *BPC*. Следовательно:

$$S_{OMPN}=\frac{1}{3}S_{\Delta BPC}=\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}ah=\frac{1}{6}\cdot 60=10.$$



Пусть теперь $BC=2a,\ AD=a.$ Пусть $AM=3t$. Треугольник AOD подобен треугольнику COB с коэффициентом подобия 2,
а треугольник AMP — треугольнику CMB CMB с коэффициентом $\frac{AP}{BC}=\frac{1}{4}.$ Тогда

$$MC=4AM=12t,\ AC=AM+MC=3t+12t=15t,$$

$$AO=\frac{1}{3}AC=5t,\ \frac{AM}{AO}=\frac{3t}{5t}=\frac{3}{5}.$$

Аналогично, $\frac{DN}{DO}=\frac{3}{5}.$ Высота треугольника $AOD,$ проведённая из вершины O равна $\frac{1}{3}h$ значит:

$$S_{\Delta AOD}=\frac{1}{2}a\cdot\frac{1}{3}h=\frac{1}{6}\cdot 60=10.$$

$$S_{\Delta DNP}=S_{\Delta AMP}=\frac{AM}{AO}\cdot\frac{AP}{AD}S_{\Delta AOD}=\frac{3}{5}\cdot\frac{1}{2}\cdot 10=3.$$

Следовательно,

$$S_{OMPN}=S_{\Delta AOD}-S_{\Delta AMP}-S_{\Delta DNP}=10-3-3=4.$$

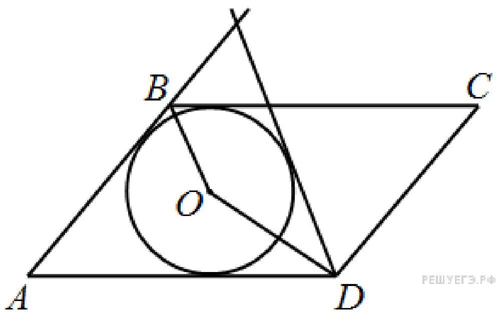
Ответ: 10 или 4.

или

Дан параллелограмм $ABCD$, $AB=3$, $BC=5$, $\angle A=60°$. Окружность с центром в точке O касается биссектрисы угла D и двух сторон параллелограмма, исходящих из вершины одного его острого угла. Найдите площадь четырёхугольника $ABOD$.

Решение.

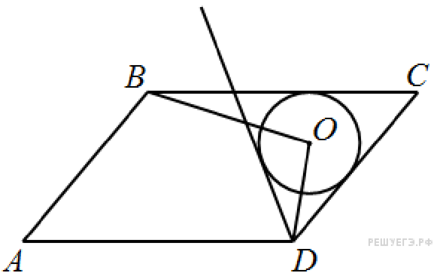
Окружностей две: каждая из них вписанная в правильный треугольник. Эти треугольники имеют стороны равные 5 и 3 соответственно. Для треугольника со стороной 5 радиус равен $r=\frac{5\cdot\sin 60^{\circ}}{3}=\frac{5\sqrt{3}}{6}.$



Найдем площадь невыпуклого четырехугольника как сумму площадей треугольников AOB и AOD:

$$S_{ABOD}=\frac{1}{2}AB\cdot r+\frac{1}{2}AD\cdot r=\frac{1}{2}\cdot 8\cdot\frac{5\sqrt{3}}{6}=\frac{10\sqrt{3}}{3}.$$

Для треугольника со стороной 3 радиус равен $r=\frac{3\cdot\sin 60^{\circ}}{3}=\frac{\sqrt{3}}{2}.$



Чтобы найти площадь четырехугольника *ABOD,* вычтем из площади параллелограмма площади треугольников *BOC* и *DOC:*

$$S_{ABOD} = AB \cdot AD \cdot \sin 60^\circ - \frac{1}{2}BC \cdot r - \frac{1}{2}CD \cdot r = \frac{11\sqrt{3}}{2}.$$

Ответ: $\frac{10\sqrt{3}}{3}$, $\frac{11\sqrt{3}}{2}$.

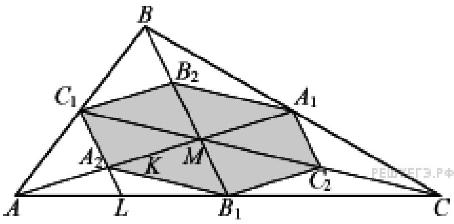
<u>или</u>

Медианы AA_1, BB_1 и CC_1 треугольника ABC пересекаются в точке M. Точки A_2, B_2 и C_2 — середины отрезков MA, MB и MC соответственно.

а) Докажите, что площадь шестиугольника $A_1B_2C_1A_2B_1C_2$ вдвое меньше площади треугольника ABC.

б) Найдите сумму квадратов всех сторон этого шестиугольника, если известно, что $AB = 5$, $BC = 8$ и $AC = 10$.

Решение.



а) Площадь треугольника A_1MB_2 в два раза меньше площади треугольника A_1MB, поскольку $MB = 2MB_2$, а высота, проведённая из вершины A_1, у этих треугольников общая: $S_{A_1MB}=2S_{A_1MB_2}$

Аналогично получаем ещё 5 равенств:

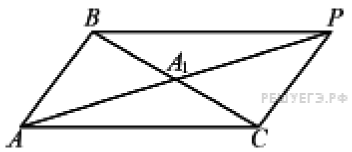
$S_{A_1MC} = 2S_{A_1MC_2}$, $S_{B_1MC} = 2S_{B_1MC_2}$, $S_{B_1MA} = 2S_{B_1MA_2}$, $S_{C_1MA} = 2S_{C_1MA_2}$ и $S_{C_1MB} = 2S_{C_1MB_2}$.

Складывая эти равенства почленно, получаем

$S_{ABC} = 2S_{A_1C_2B_1A_2C_1B_2}$.

б) Обозначим длины сторон *BC, AC, AB* треугольника *ABC* через *a, b, c.*

Докажем, что квадрат медианы AA_1 равен



$$\frac{1}{4}(2b^2 + 2c^2 - a).$$

Для доказательства на продолжении отрезка AA_1 за точку A_1 отложим отрезок $A_1P = AA_1$. Получим параллелограмм *ACPB* со сторонами $AC = PB = b$ и $AB = CP = c$ и диагоналями $BC = a$ и $AP = 2AA_1$.

Сумма квадратов диагоналей параллелограмма равна сумме квадратов его сторон: $2b^2 + 2c^2 = a^2 + 4AA_1^2$, откуда

$$AA_1^2 = \frac{1}{4}(2b^2 + 2c^2 - a^2).$$

Аналогично доказывается, что

$BB_1^2 = \frac{1}{4}(2a^2 + 2c^2 - b^2)$, а $CC_1^2 = \frac{1}{4}(2a^2 + 2b^2 - c^2)$.

Отрезок C_1A_2 — средняя линия треугольника *ABM*, значит,

$$C_1A_2 = \frac{1}{2}BM = \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3}BB_1 = \frac{1}{3}BB_1.$$

Рассуждая аналогично, мы получим, что стороны шестиугольника втрое меньше медиан треугольника

$$ABC: B_2C_1 = B_1C_2 = \frac{1}{3}AA_1,\ A_2B_1 = A_1B_2 = \frac{1}{3}CC_1.$$

Следовательно, сумма квадратов сторон шестиугольника равна

$$2 \cdot (B_1C_2^2 + A_1C_2^2 + A_1B_2^2) = \frac{2}{9}(AA_1^2 + BB_1^2 + CC_1^2) =$$

$$= \frac{2}{9} \cdot \frac{1}{4} \cdot (2b^2 + 2c^2 - a^2 + 2a^2 + 2c^2 - b^2 + 2a^2 + 2b^2 - c^2) =$$

$$= \frac{1}{18} \cdot 3 \cdot (a^2 + b^2 + c^2) = \frac{1}{6} \cdot (a^2 + b^2 + c^2).$$

Подставляя в эту формулу длины сторон треугольника *ABC*, получаем $\frac{63}{2}$.

Ответ: $\frac{63}{2}$.

17 ***Практические задачи.***

Фермер получил кредит в банке под определенный процент годовых. Через год фермер в счет погашения кредита вернул в банк 3/4 от всей суммы, которую он должен банку к этому времени, а еще через год в счет полного погашения кредита он внес в банк сумму, на 21% превышающую величину полученного кредита. Каков процент годовых по кредиту в данном банке?

Решение.

Пусть сумма кредита составляет S у.е., а процентная ставка по кредиту *x%*. К концу первого года сумма долга фермера в банк с учетом начисленных процентов составила *(1+0,01x)S* у.е.

После возвращения банку 3/4 части от суммы долга долг фермера на следующий год составил $\frac{1}{4}(1+0{,}01x)S$ у.е.

На эту сумму в следующем году вновь начислены проценты. Сумма долга фермера к концу второго года погашения кредита с учетом процентной ставки составила $\frac{1}{4}(1+0{,}01x)^2 S$ у.е. По условию задачи эта сумма равна *1,21S* у.е.

Решим уравнение $\frac{1}{4}(1+0{,}01x)^2 S = 1{,}21S$ на множестве положительных чисел.

$(1+0{,}01x)^2 = 4 \cdot 1{,}21 \Leftrightarrow 1+0{,}01x = 2 \cdot 1{,}1 \Leftrightarrow 0{,}01x = 1{,}2 \Leftrightarrow x = 120.$

Ответ: 120.

или

Оля хочет взять в кредит 100 000 рублей. Погашение кредита происходит раз в год равными суммами (кроме, может быть, последней) после начисления процентов. Ставка процента 10 % годовых. На какое минимальное количество лет может Оля взять кредит, чтобы ежегодные выплаты были не более 24000 рублей?

Решение.

Пусть сумма кредита равна S, а годовые составляют a %. Тогда в последний день каждого года оставшаяся сумма долга умножается на коэффициент $b = 1 + 0{,}01a$. Составим таблицу выплат.

Год	Долг банку (руб.)	Остаток доли после выплаты (руб.)
0	100000	–
1	110000	86000
2	94600	70600
3	77660	53660
4	59026	35026
5	38528,6	14528,6
6	15981,46	0

Значит, Оля погасит кредит за 6 лет.

Ответ: 6

<u>или</u>

В январе 2000 года ставка по депозитам в банке «Возрождение» составила *x* % годовых, тогда как в январе 2001 года — *y* % годовых, причем известно, что *x* + *y* = 30%. В январе 2000 года вкладчик открыл счет в банке «Возрождение», положив на него некоторую сумму. В январе 2001 года, по прошествии года с того момента, вкладчик снял со счета пятую часть этой суммы. Укажите значение *x* при котором сумма на счету вкладчика в январе 2002 года станет максимально возможной.

Решение.

Пусть в январе 2000 года вкладчик положил на счет S у.е. Тогда в январе 2001 года на счету сумма станет $S(1+0,01x)$ у.е. Но в январе же 2001 года вкладчик снял $0,2S$ у.е. На счету осталось:

$$S(1+0,01x)-0,2S=0,8S+0,01S\cdot x \text{ у.е.}$$

В январе 2002 года сумма на счету будет равна:

$$(0,8S+0,01S\cdot x)\cdot(1+0,01(30-x))=(0,8S+0,01S\cdot x)\cdot(1+0,3-0,01x)=$$
$$=(0,8S+0,01S\cdot x)\cdot(1,3-0,01x)=1,04S+0,013Sx-0,008Sx-0,0001Sx^2=$$
$$=-0,0001Sx^2+0,005Sx+1,04S.$$

Функция $f(x)=-0,0001Sx^2+0,005Sx+1,04S$ является квадратичной от x.

У нее есть наибольшее значение при $x_0 = \dfrac{0,005S}{2 \cdot 0,0001S} = 25.$

Ответ: 25.

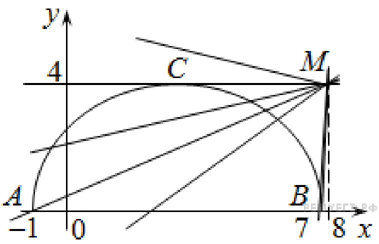
18 <u>*Уравнения .неравенства и системы с параметрами*</u>

Найдите все значения а, при каждом из которых уравнение $8a + \sqrt{7 + 6x - x^2} = ax + 4$ имеет единственный корень.

Решение.

Запишем уравнение в виде $\sqrt{7+6x-x^2} = ax + 4 - 8a$

Рассмотрим две функции: $f(x) = \sqrt{7+6x-x^2}$ и $g(x) = ax - 8a + 4.$



Графиком функции $f(x) = \sqrt{4^2 - (x-3)^2}$ является полуокружность радиуса 4 с центром в точке (3;0). лежащая в верхней полуплоскости (см. рис.). При каждом значении *a* графиком функции *g(x)* является прямая с угловым коэффициентом ***a***, проходящая через точку $M(8;\ 4).$

Уравнение имеет единственный корень, если графики функций *f(x)* и *g(x)* имеют единственную общую точку, либо прямая касается полуокружности, либо пересекает её в единственной точке.

Касательная *MC* проведённая из точки M к полуокружности, имеет угловой коэффициент, равный нулю, то есть при *a = 0* исходное уравнение имеет единственный корень. При *a < 0* прямая не имеет общих точек с полуокружностью.

Прямая $MA,$ заданная уравнением $y = ax - 8a + 4,$ проходит через точки $M(8;\ 4)$ и $A(-1;\ 0),$ следовательно, её угловой коэффициент $a = \dfrac{4}{9}.$

При $0 < a \le \dfrac{4}{9}$ прямая, заданная уравнением $y = ax - 8a + 4,$ имеет две общие точки с полуокружностью.

Прямая $MB,$ заданная уравнением $y = ax - 8a + 4,$ проходит через точки $M(8;\ 4)$ и $B(7;\ 0)$; следовательно, её угловой коэффициент $a = 4.$

При $\dfrac{4}{9} < a \le 4$ прямая, заданная уравнением $y = ax - 8a + 4,$ имеет угловой коэффициент больше, чем у прямой $MA,$ и не больше, чем у прямой $MB,$ и пересекает полуокружность в единственной точке.

Получаем, что при $\frac{4}{9} < a \le 4$ исходное уравнение имеет единственный корень.

При $a > 4$ прямая не имеет общих точек с полуокружностью.

Ответ: $0;\ \left(\frac{4}{9};\ 4\right]$.

<u>или</u>

Найдите все значения *a* , при каждом из которых уравнение

$$\frac{4^{-x^2} - a \cdot 2^{1-x^2} + a}{2^{1-x^2} - 1} = 3$$

имеет хотя бы одно решение.

*Решение***.**

Сделаем замену $z = 2^{-x^2}$, $x^2 \ge 0,$ поэтому $0 < z \le 1$. Задачу можно сформулировать так: найдите значения a, при каждом из которых уравнение $\frac{z^2 - 2az + a}{2z - 1} = 3$ имеет хотя бы одно решение, удовлетворяющее условию $0 < z \le 1$.

Перейдем к системе:

$$\begin{cases} z^2 - 2az + a = 6z - 3, \\ z \ne 0,5, \\ 0 < z \le 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z^2 - 2(a+3)z + a + 3 = 0, \\ z \ne 0,5, \\ 0 < z \le 1. \end{cases}$$

Заметим, что ни при одном значении *a* число $z = 0,5$ не является корнем уравнения.

Рассмотрим функцию $f(z) = z^2 - 2(a+3)z + a + 3$.

Её график — парабола, ветви которой направлены вверх. Следовательно, условие задачи выполнено тогда и только тогда, когда выполняется одно из трех условий:

1) Трёхчлен имеет два различных корня, и только больший из них лежит на промежутке $(0,\ 1]$, то есть

$$\begin{cases} f(0) < 0, \\ f(1) \ge 0. \end{cases}$$

2) Трёхчлен имеет два различных корня, и только меньший из них лежит на промежутке $(0,\ 1]$, то есть

$$\begin{cases} f(0) > 0, \\ f(1) \le 0. \end{cases}$$

3) Трёхчлен имеет два корня, возможно, совпадающих, и оба, а также вершина, лежат на промежутке $(0,\ 1]$, то есть

$$\begin{cases} f(0) > 0, \\ f(1) \geq 0, \\ f(z_0) \leq 0, \\ 0 < z_0 \leq 1 \end{cases}$$

где $z_0 = a + 3$ — абсцисса вершины параболы. Эти условия соответствуют следующим способам расположения графика функции $f(z)$:

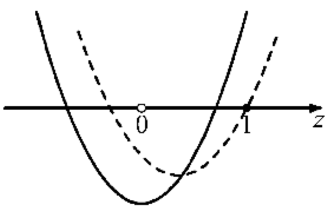


Рис. 1

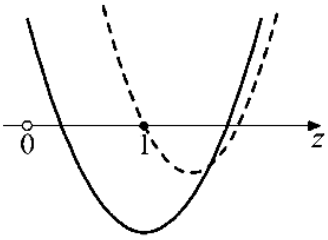


Рис. 2

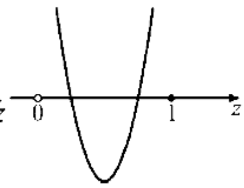


Рис. 3

Решим первую систему:

$$\begin{cases} a + 3 < 0, \\ 1 - a - 3 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a < -3, \\ a \leq -2 \end{cases} \Leftrightarrow a < -3.$$

Решим вторую систему:

$$\begin{cases} a + 3 > 0, \\ 1 - a - 3 \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a > -3, \\ a \geq -2 \end{cases} \Leftrightarrow a \geq -2.$$

Решим третью систему:

$$\begin{cases} a + 3 > 0, \\ 1 - a - 3 \geq 0, \\ (a+3)^2 - 2(a+3)^2 + a + 3 \leq 0, \\ 0 < a + 3 \leq 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a > -3, \\ a \leq -2, \\ \left[\begin{array}{l} a \leq -3, \\ a \geq -2 \end{array} \right. \end{cases} \Leftrightarrow a = -2.$$

Ответ: $a < -3, a \geq -2.$

<u>или</u>

Известно, что значение параметра *a* таково, что система уравнений

$$\begin{cases} \mathbf{2^{\ln y} = 4^{|x|}} \\ \mathbf{\log_2(x^4y^2 + 2a^2) = \log_2(1 - ax^2y^2) + 1} \end{cases}$$

имеет единственное решение. Найдите это значение параметра *a* и решите систему при найденном значении параметра.

Решение.

Из первого уравнения системы получаем

$$2^{\ln y} = 4^{|x|} \Leftrightarrow y = e^{2|x|}.$$

Заметим, что если пара *(x;y)* — решение системы, то пара *(-x;y)* — также решение этой системы. Поскольку система имеет единственное решение, то этим решением может быть только пара *(0;y)*. Таким образом, $x = 0$ и из второго уравнения получаем:

$$\log_2(2a^2) = \log_2 1 + 1 \Leftrightarrow \log_2(2a^2) = 1 \Leftrightarrow 2a^2 = 2 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a = 1, \\ a = -1. \end{array}\right.$$

Проверим, действительно ли система при найденных значениях ***a*** имеет единственное решение.

1. Если a=1, то система действительно имеет единственное решение:

$$\log_2(x^4y^2+2) = \log_2(1-x^2y^2)+1 \Leftrightarrow x^4y^2+2 = 2-2x^2y^2 \Leftrightarrow y^2(x^4+2x^2) = 0 \underset{y>0}{\Leftrightarrow} x = 0.$$

Тогда

$$y = e^0 = 1.$$

2. Если $a = -1$, то система имеет три решения:

$$\log_2(x^4y^2+2) = \log_2(1+x^2y^2)+1 \Leftrightarrow x^4y^2+2 = 2+2x^2y^2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow y^2(x^4-2x^2) = 0 \underset{y>0}{\Leftrightarrow} x^4-2x^2 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0, \\ x = \sqrt{2}, \\ x = -\sqrt{2}. \end{array}\right.$$

Каждому из найденных значений *x* соответствует единственное значение

$$y = e^{2|x|}.$$

Ответ: система имеет единственное решение (0;1) при a = 1.

19 ***<u>Числа и их свойства.</u>***

На доске написано более 40, но менее 48 целых чисел. Среднее арифметическое этих чисел равно –3 − , среднее арифметическое всех положительных из них равно 4, а среднее арифметическое всех отрицательных из них равно −8.

а) Сколько чисел написано на доске?

б) Каких чисел написано больше: положительных или отрицательных?

в) Какое наибольшее количество положительных чисел может быть среди них?

Решение.

Пусть среди написанных чисел k положительных, l отрицательных и m нулей. Сумма набора чисел равна количеству чисел в этом наборе, умноженному на его среднее арифметическое, поэтому $4k - 8l + 0 \cdot m = -3(k + l + m)$.

а) Заметим, что в левой части приведённого выше равенства каждое слагаемое делится на 4, поэтому $k + l + m$ — количество целых чисел — делится на 4. По условию

$40 < k + l + m < 48$, поэтому $k + l + m = 44$. Таким образом, написано 44 числа.

б) Приведём равенство $4k - 8l = -3(k + l + m)$ к виду $5l = 7k + 3m$. Так как $m \geq 0$, получаем, что $5l \geq 7k$, откуда $l > k$. Следовательно, отрицательных чисел больше, чем положительных.

в) Подставим $k + l + m = 44$ в правую часть равенства $4k - 8l = -3(k + l + m)$: $4k - 8l = -132$, откуда $k = 2l - 33$. Так как $k + l \leq 44$, получаем: $3l - 33 \leq 44$, $3l \leq 77$, $l \leq 25$, $k = 2l - 33 \leq 17$; то есть положительных чисел не более 17.

Приведём пример, когда положительных чисел ровно 17. Пусть на доске 17 раз написано число 4, 25 раз написано число -8 и два раза написан 0. Тогда

$$\frac{4 \cdot 17 - 8 \cdot 25}{44} = \frac{68 - 200}{44} = -3$$

указанный набор удовлетворяет всем условиям задачи.

Ответ: а) 44; б) отрицательных; в) 17.

<u>или</u>

Винтики можно разложить в пакетики, а пакетики упаковать в коробки, по 3 пакетика в одну коробку. Можно эти же винтики разложить в пакетики так, что в каждом пакетике будет на 3 винтика больше, чем раньше, но тогда в каждой коробке будет лежать по 2 пакетика, а коробок потребуется на 2 больше. Какое наибольшее число винтиков может быть при таких условиях?

Решение.

Пусть в каждой из x коробок лежит три пакетика, по n винтиков в каждом. Во втором случае коробок $x + 2$, пакетиков в коробке 2, а винтиков в пакетике $n + 3$. По условию задачи получаем:

$$3nx = 2(n + 3)(x + 2)$$

Откуда

$$n = \frac{6x + 12}{x - 4} = 6 + \frac{36}{x - 4} = 6\left(1 + \frac{6}{x - 4}\right).$$

Учитывая, что числа n и x натуральные, получаем, что $x - 4$ — натуральный делитель числа 36. Количество винтиков при этом

$$f(x) = 3nx = 18\left(x + \frac{6x}{x - 4}\right) = 18\left(x + \frac{24}{x - 4}\right) + 108.$$

Решение находим перебором делителей.

Ответ: 840.

Примечание.

Перебор можно заменить исследованием функции.

Функция $y = x + \dfrac{24}{x-4}$ монотонно убывает при $4 < x \leq 2+\sqrt{6}$ и монотонно возрастает при $x \geq 4+2\sqrt{6}$. Следовательно, наибольшее значение функции $f(x)$ достигается, если $x-4$ — наибольший или наименьший натуральный делитель числа 36.

Если $x-4=1$, то $x=5,\ f(5)=18(5+24)+108=630$.

Если $x-4=36$, то

$$x=40,\ f(40)=18\left(40+\frac{2}{3}\right)+108=840.$$

__или__

За победу в шахматной партии начисляют 1 очко, за ничью ─ 0,5 очка, за проигрыш ─ 0 очков. В турнире принимают участие *m* мальчиков и *d* девочек, причём каждый играет с каждым дважды.

а) Каково наибольшее количество очков, которое в сумме могли набрать девочки, если *m* = 3, *d* = 2.

б) Какова сумма набранных всеми участниками очков, если *m* + *d* = 10.

в) Каковы все возможные значения *d*, если *m* = 7*d* и известно, что в сумме мальчики набрали ровно в 3 раза больше очков, чем девочки?

Решение.

а) Каждая из двух девочек могла выиграть оба раза у всех троих мальчиков, получив в сумме 6 очков. Сыграв две партии друг с другом, девочки распределили между собой ещё 2 очка. Всего $6+6+2=14$ очков.

б) Играя по две партии каждый с каждым, десять детей играют всего $2\cdot\dfrac{9\cdot 10}{2}=90$ партий. В каждой партии вне зависимости от её исхода разыгрывается одно очко. Поэтому всего набрано 90 очков.

в) Всего детей было $7d+d=8d$, играя по две партии каждый с каждым они сыграли между собой $2\cdot\dfrac{8d(8d-1)}{2}=8d(8d-1)$ партий и разыграли $8d(8d-1)$ очков. Из них у мальчиков три четверти очков, а у девочек — одна четверть, т. е. у девочек $2d(8d-1)=16d^2-2d$ очков. Заметим, что если каждая девочка выиграла у всех мальчиков, то вместе девочки набрали максимум $2\cdot d\cdot 7d$ очков, а играя между собой, девочки распределили $d(d-1)$ очков. Поэтому наибольшее количество очков, которое могли набрать девочки, равно $14d^2+d(d-1)$. Тем самым, имеем: $16d^2-2d \leq 15d^2-d \Leftrightarrow d^2 \leq d$. Следовательно, девочек не могло быть больше одной.

Если девочка была одна, то мальчиков было семеро. Они сыграли 56 партий и разыграли 56 очков. Девочка набрала 14 очков, выиграв у каждого из мальчиков по две партии. Играя между собой, мальчики разыграли оставшиеся 42 очка.

Ответ : *а)14*
б)90
в)девочка-14,мальчики-42

<u>или</u>

Найдите все пары натуральных чисел m и n, являющиеся решениями уравнения $2^m - 3^n = 1$.

Решение.

Если $m = 1$, то получаем уравнение $3^n = 1$, решением которого является не натуральное число 0.

Если $m = 2$, то получаем уравнение $3^n = 3$, которое имеет натуральное решение $n = 1$.

При $m > 2$, решений нет, поскольку левая часть уравнения $2^m = 3^n + 1$ кратна 8, а правая нет. Действительно, при делении на 8 число $3^{2k} = 9^k = (8+1)^k$ даёт остаток 1, число 3^{2k+1} даёт остаток 3, а число $3^{2k+1} + 1$ — остаток 4.

Ответ: $m = 2,\ n = 1.$